Derivada covariante.

Motivação

A invenção da bússola permitiu que mesmo em dias e noites muito nubladas em alto mar, um piloto pudesse seguir um rumo definido. Era só usar o leme de modo a que o eixo longitudinal do navio ficasse sempre num determinado ângulo desejado em relação ao norte. Com isso, mesmo sem visão da costa, do sol ou das estrelas, havia a certeza de não estar navegando em círculos.

Entretanto, seguir um mesmo rumo do início ao fim da viagem é a melhor escolha? Falo de barcos a motor, que não dependem de ziguezaguear para aproveitar a direção do vento.

Em viagens curtas, entre portos bem próximos, isso não aparece como um problema. Mas suponhamos uma viagem de 6000 km entre um porto do Brasil e um destino na costa oeste da África com a mesma latitude. Seguir sempre o mesmo rumo significa nesse caso ir exatamente para leste, ou manter um ângulo fixo de 90 graus com o norte. A figura 1 mostra uma visão usual do globo terrestre, com a linha equador no centro. Todos os paralelos, linhas de latitude constante aparecem com retas. Por essa perspectiva, ir sempre para o leste parece uma escolha correta.

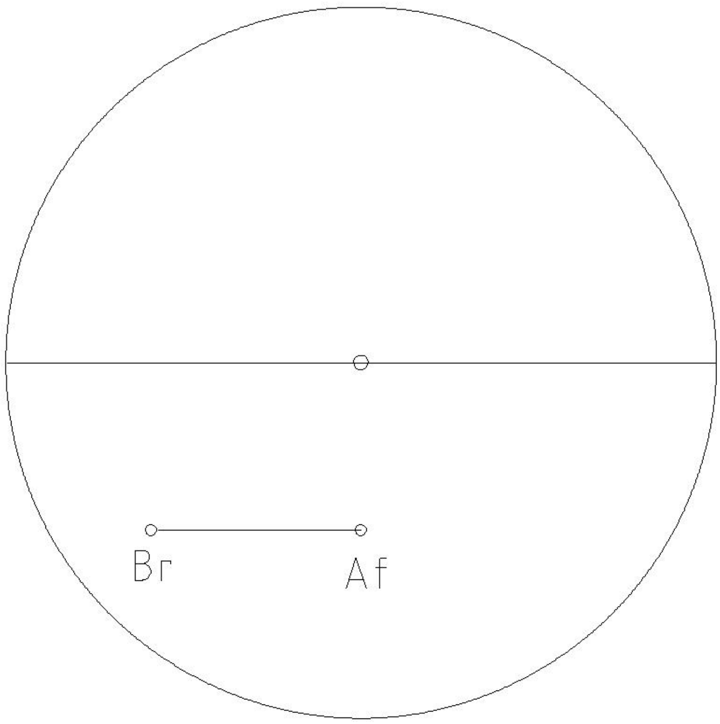

Fig 1

Entretanto, se um observador olhar a terra a partir do polo sul, onde os paralelos aparecem como círculos, a escolha do rumo parece bem discutível. O curso para leste significa seguir por um paralelo como mostra a figura 2. A impressão é de que não é o caminho mais curto.

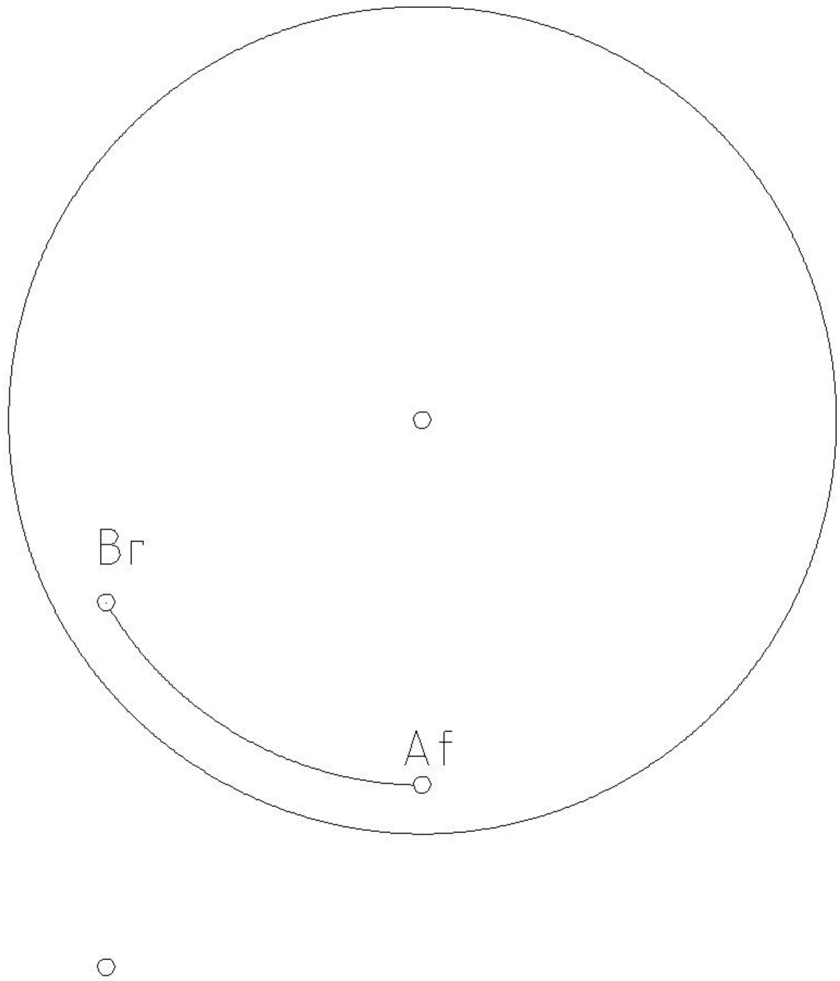

Fig 2

A solução é olhar para o globo terrestre de modo que a linha que une os portos seja um grande círculo. Isso equivale a uma mudança de coordenadas, em que eu definisse que a nova linha do equador é a que cruza esses 2 pontos. A realidade de quem está na superfície da terra é exatamente essa. A pessoa está na vertical, todo o globo abaixo dela. Nesse caso, a representação de uma reta realmente corresponde ao caminho mais curto como mostra a figura 3.

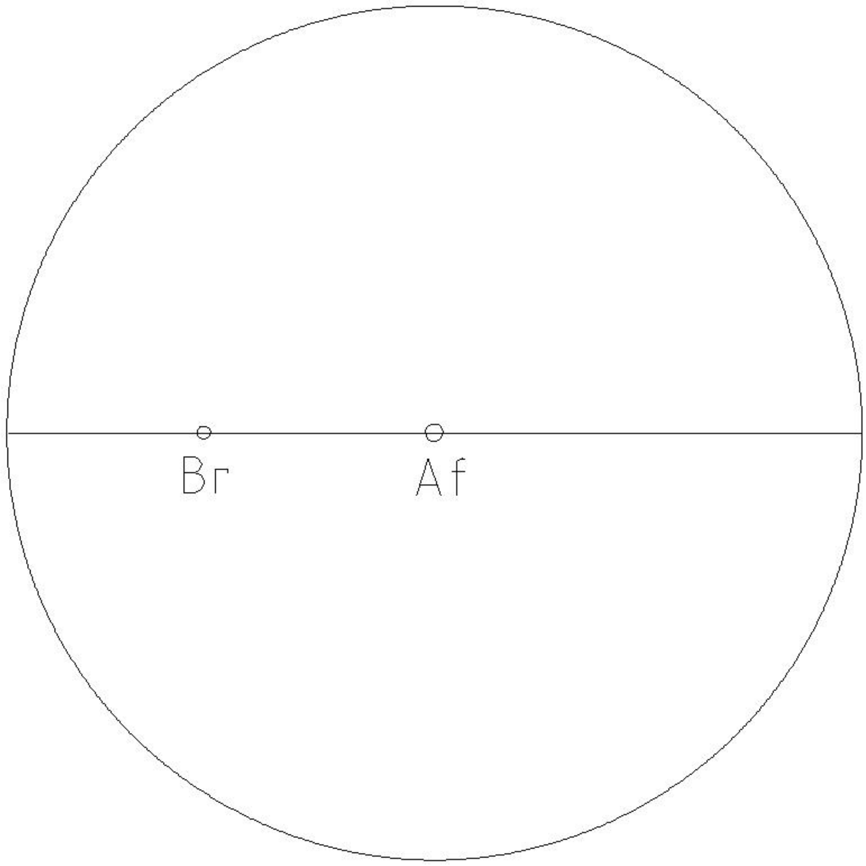

Fig 3

A figura 4 mostra a mesma situação da figura 1, onde o caminho mais curto aparece como uma curva, aparentando ser mais longo. A figura 5 mostra a situação da visão do polo sul da figura 2. Agora, o caminho mais curto ainda aparece como curva, embora menos acentuada que na primeira opção de curso constante para leste.

Tanto na figura 4, como na figura 5 percebe-se que o caminho mais curto entre os portos não corresponde a um curso constante. No começo da trajetória há uma componente para o norte. Por exemplo, o ângulo do barco com a agulha da bússola em vez de 90 graus, é inicialmente de 80 graus. Gradualmente esse curso vai sendo modificado, em algum momento fica exatamente 90 graus, e finalmente passa a ter um componente cada vez mais acentuado para o sul no trecho final da viagem.

A derivada

Podemos considerar o ângulo de curso com a bússola como uma função das coordenadas do navio (longitude e latitude). Vamos representar a longitude como um ângulo θ, variando de zero a 360^0, e a latitude como um ângulo ϕ, sendo zero no equador, crescendo até 90^0 no polo norte e decrescendo até -90^0 no polo sul. O ângulo de curso como $A_c(\theta,\phi)$.

Pelo conceito de derivada em coordenadas cartesianas, quando uma função não varia nas vizinhanças de um ponto, sua derivada é zero. Se ao longo de um percurso a função é constante, sua derivada é sempre zero. Um ângulo de curso com relação ao eixo x ou y sempre constante no plano cartesiano implica numa trajetória retilínea.

Aqui aparece um problema nas coordenas curvilíneas típicas da superfície esférica da terra (θ,ϕ). O caminho mais curto entre os 2 portos do exemplo é o que segue um grande círculo, e assim como no plano cartesiano a distância mais curta entre 2 pontos é uma reta, esse é o caminho equivalente nessas coordenadas curvilíneas.

Só que $\partial A_c(\theta,\phi) /\partial\theta$ e $\partial A_c(\theta,\phi) /\partial\phi$ são iguais a zero quando o curso é constante, mas isso não corresponde ao conceito de trajetória retilínea (de ser o caminho mais curto). Por outro lado, ao longo da trajetória correspondente ao caminho mais curto, $A_c(\theta,\phi)$ varia o tempo todo. Portanto $\partial A_c(\theta,\phi) /\partial\theta$ ou $\partial A_c(\theta,\phi) /\partial\phi$ ou ambas são diferentes de zero.

Se forem a cada ponto adicionados termos de correção às derivadas parciais, de modo que a soma desta últimas com esses termos seja zero para uma trajetória correspondente ao caminho mais curto, chamamos a essa soma (em cada ponto) de derivada covariante em relação àquela trajetória. Uma vez definidos os termos de correção eles podem ser aplicados em qualquer trajetória. Por exemplo, nas trajetórias de curso constante, onde as derivadas parciais são zero, a derivada covariante é diferente de zero. O cálculo para os termos de correção depende do tipo de superfície e do sistema de coordenadas aplicado. No caso de uma superfície bastante simples e simétrica como a da esfera a maior parte desses termos são zero. São conhecidos como símbolos de Christoffel.